ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

M

Concours d'Admission 1988

MATHEMATIQUES I

*****

Dans tout le problème, x et t désignent des réels. On se propose d'étudier quelques propriétés des

séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$

Première Partie

I.1. Soient $(a_n)_{n \in N}$ et $(b_n)_{n \in N}$ deux suites de réels telles que les séries entières

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ aient un rayon de convergence infini.

On désigne par f(x) et g(x) les sommes respectives de ces séries. On suppose de plus que a_n est strictement positif à partir d'un certain rang.

a) Montrer que si b_n est négligeable devant a_n lorsque n tend vers $+\infty$, alors g(x) est négligeable devant f(x) lorsque x tend vers $+\infty$. Il pourra être utile de mettre f(x) sous la forme

$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$ et de faire le même travail pour g(x), N étant convenablement choisi.

b) Que dire des comportements comparés de f et g en $+\infty$ lorsque l'on suppose cette fois que a_n et b_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$?

I.2.a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x et tout t.

b) Montrer que l'application ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ est continue et admet des dérivées partielles en x et t continues.

c) Quelle relation peut-on écrire entre $\phi'_x(x,t)$ et $\phi(x,t+1)$?

d) Etablir, pour x tendant vers $+\infty$, t étant fixé, l'équivalence $\phi(x,t+1) \sim x\phi(x,t)$.

I.3. a) Donner à l'aide de fonctions usuelles une expression de $\phi(x,0)$, $\phi(x,1)$, $\phi(x,2)$.

b) Montrer que, pour t entier strictement positif, $\phi(x,t)$ est le produit de e^x par un polynôme dont on précisera le terme de plus haut degré.

c) Donner, t étant un entier relatif fixé, un équivalent de $\phi(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$.

TOURNER LA PAGE

Deuxième Partie

On se limite dans toute cette partie à $0 \leq t \leq 1$ et $x > 0$.

II.1. Etablir, pour tout entier n strictement positif, les inégalités :

$$0 \leq (n+1)^t - n^t - t(n+1)^{t-1} \leq \frac{t-t^2}{2} n^{t-2} \leq \frac{1}{8} n^{t-2}$$

II.2. Etablir pour tout $n \geq 1$ et pour tout t l'inégalité : $n^{t-2} \leq 6 \frac{(n+2)^{t-1}}{n+1}$

Le coefficient 6 peut-il être remplacé par une constante plus petite ?

II.3. Déduire des deux questions précédentes l'existence d'une constante L telle que pour tout x et tout t on ait la double inégalité :

$$0 \leq \phi_x'(x,t) - \left(1 + \frac{t}{x}\right) \phi(x,t) \leq \frac{3}{4x^2} \phi(x,t) + L$$

On donnera une valeur numérique de L (on ne cherchera pas la meilleure possible).

II.4.a) Vérifier que l'égalité :

$\phi_x'(x,t) = \phi(x,t)\left[1 + \frac{t}{x} + \frac{\omega(x,t)}{x^2}\right]$ définit une application ω de $\mathbf{R}_+^* \times \left]0,1\right[$ dans $\mathbf{R}$.

Montrer que la fonction ω ainsi définie est positive et bornée. En donner un majorant M (On ne cherchera pas le meilleur possible).

b) Montrer que l'application ω est continue.

c) Etablir la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du$

II.5.a) Montrer que, pour tout t, il existe un réel strictement positif K(t) tel que, pour tout x :

$$\phi(x,t) = K(t)\, x^t e^x \exp\left(-\int_x^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du\right)$$

b) En déduire la double inégalité :

$K(t)\, x^t e^{x - \frac{M}{x}} \leq \phi(x,t) \leq K(t)\, x^t e^x$ et donner, à l'aide de t, un équivalent de $\phi(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$.

Troisième Partie

III.1. Etablir la continuité de l'application qui au réel $t \in \left]0,1\right[$ associe $\int_1^{+\infty} \frac{\omega(u,t)}{u^2} du$

En déduire la continuité de l'application qui au réel $t \in \left]0,1\right[$ associe K(t) (Cf. II.5).

TOURNER LA PAGE

III.2. On donne deux réels positifs t et β tels que $t + \beta \leq 1$. On admet que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^t \left(1 - \frac{k}{n}\right)^\beta = \frac{1}{2^{t+\beta}}$$

Etablir alors que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\phi(x,t)\ \phi(x,\beta) \sim e^{2x}\ x^{t+\beta}\ K(t+\beta)$$

III.3. Soit H une application continue de $]0,1[$ dans $\mathbf{R}_+^*$ telle que $H(0) = H(1) = 1$ et telle que, pour tout couple de réels positifs (t, β) tels que $t + \beta \leq 1$, l'on ait :

$H(t + \beta) = H(t)\,H(\beta)$. Etablir que H est constante. Qu'en déduire pour la fonction K ?

III.4. Déduire de ce qui précède un équivalent de $\phi(x, t)$ lorsque x tend vers $+\infty$, d'abord pour t compris entre 0 et 1, puis pour t réel quelconque.

Quatrième Partie

IV.1.a) Montrer que, pour tout couple (x, t) de réels, la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^t}{\ln n} \frac{x^n}{n!}$ est convergente ;

On désignera sa somme par $\psi(x, t)$.

b) *On suppose dans la suite* $x > 0$. Etablir la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{t} (\phi(x,u) - x)\,du$$ et comparer sa valeur à $\psi(x, t)$.

IV.2. On donne t et β tels que $t < \beta$. Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\psi(x, t)$ est négligeable devant $\psi(x, \beta)$.

IV.3. On suppose $0 < t \leq 1$. En utilisant l'inégalité établie, dans ce cas, en (II.5.) pour $\phi(x, t)$, trouver un équivalent de $\psi(x, t)$ quand x tend vers $+\infty$.

IV.4. Etendre le résultat trouvé ci-dessus au cas où t est un réel quelconque.

**** FIN ****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail